ELSEVIER

Journal of Geometry and Physics 15 (1995) 150-158

JOURNAL OF GEOMETRY AND PHYSICS

Sur la complétude des variétés pseudo-riemanniennes

M. Guediri, J. Lafontaine

Département de Mathématiques, Unité Associée au CNRS nr. 1407, Université Montpellier II, F-34095 Montpellier Cedex 5, France [1]

Reçu le 30 août 1993

Abstract

We discuss completeness for pseudo-riemannian manifolds, and give new examples of non-complete *compact* manifolds. The former are *simply connected*, the latter *locally homogeneous.*

Key words: Completeness, Pseudo-Riemannian manifolds,
1991 MSC: 53 C 50
PACS: 04.20 Cv

1. Introduction

Rappelons qu'une variété pseudo-riemannienne (M, g) est complète si son champ géodésique est complet. Dans le cas riemannien, si M est compacte, les niveaux de l'intégrale première d'énergie sont compacts, et toute métrique sur une variété compacte est complète. De plus, puisque g définit naturellement une métrique, il résulte immédiatement du théorème d'existence locale des géodésiques qu'une métrique riemannienne *homogène* est complète (voir par exemple [3], p. 181).

Quand g n'est pas définie positive, la situation est très différente, et illustrée par les deux exemples classiques suivants:

a) Le demi-plan supérieur, muni de la pseudo-métrique $dx\,dy$, est homogène sous l'action isométrique de $A^+(1,\mathbb{R})$ donnée par $(a,b)\cdot(x,y) = (ax+b, y/a)$, et bien sûr incomplet.

[1] E-mail: jaclaf@math.univ-montp2.fr

SSDI 0393-0440(93)E0063-U

b) En quotientant la pseudo-métrique $dx\,dy/(x^2+y^2)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par l'action de $\mathbb{Z}$ donnée par $n \cdot (x,y) = (t^n x, t^n y)$, où $t > 0$ est fixé, on obtient un tore Lorentzien (tore de Clifton–Pohl, cf. [10]). Ce tore est incomplet puisque la pseudo-métrique non quotientée l'est déjà.

D'autre part, sur une variété compacte toute métrique pseudo-riemannienne homogène est complète (Marsden, cf. [10]), ainsi que toute métrique Lorentzienne plate (Carrière [5]).

Dans cet article, nous donnons un critère simple de complétude, et construisons des exemples de variétés incomplètes qui sont des raffinements des exemples a) et b) ci-dessus: on améliore b) en donnant des exemples de variétés lorentziennes compactes *simplement connexes* incomplètes, et a) en donnant des exemples de variétés lorentziennes compactes, *localement homogènes* et incomplètes.

Ces exemples illustrent les limites des généralisations possibles des théorèmes de Marsden et de Carrière. C'est un plaisir de remercier Yves Carrière pour d'utiles conversations (électroniques !).

2. Un critère de complétude pour les variétés compactes

Le résultat de Marsden cité ci-dessus est la conséquence du résultat suivant plus général.

Théorème 1. *Soit (M,g) une variété pseudo-riemannienne compacte de signature $(n-s,s)$ où $2s \leq n$. On suppose qu'il existe s champs de Killing sur M, partout linéairement indépendants et négatifs. Alors (M,g) est géodésiquement complète.*

Preuve. Rappelons (théorème de Noether) que si X est un champ de Killing la fonction $v_m \mapsto g_m(X_m, v_m)$, où $v_m \in TM$, est une intégrale première du flot géodésique. Autrement dit, toute géodésique, vue comme courbe dans TM, est contenue dans un ensemble de la forme

$$E_{c_0,c_1,\ldots,c_s} = \{v \in TM \ , g(v,v) = c_0 \ \text{ et } \ g(X^i, v) = c_i\},$$

qui est un fibré en quadriques sur M. Il suffit de montrer que ces ensembles sont compacts, c'est à dire que les fibres sont compactes puisque M l'est. Soit F_m l'orthogonal aux X^i_m dans T_mM. D'après la loi de Sylvester c'est un espace euclidien; quitte à remplacer les X^i par des combinaisons linéaires, on peut les supposer deux à deux orthogonaux.

Considérons alors la décomposition

$$v = w + \sum_{i=1}^{s} a_i X^i_m, \quad \text{où } v \in T_mM \text{ et } w \in F_m.$$

La condition $g(v, X^i_m) = c_i$ impose les a_i. Alors la condition $g(v,v) = c_0$ impose $g(w,w)$, qui vit dans une sphère de F_m, d'où la compacité des fibres. $\square$

Exemple. Soit G un groupe de Lie compact et $p : P \mapsto B$ une G-fibration principale. Il est classique que les données d'une connection sur P et d'une métrique riemannienne sur B permettent de construire une métrique riemannienne sur P. La connection définit une décompsotion G-équivariante la décomposition

$$T_pP = T_ppG \oplus H_p.$$

On munit l'espace horizontal H_p de la métrique sur $T_{pi(p)}B$, l'espace vertical T_ppG de la métrique transportée d'une métrique bi-invariante b sur G (donnée une fois pour toute) à partir du plongement $g \mapsto pg$, et on décide que les verticaux et les horizontaux sont orthogonaux. A partir de là, en remplaçant la métrique sur les fibres par son opposée, on obtient une métrique pseudo-riemannienne G-invariante. Cette métrique est complète si B est compacte et $\dim G \leq \dim B$.

3. Une métrique lorentzienne incomplète sur la sphère de dimension 3

La construction est inspirée du feuilletage de Reeb. On considère S^3 comme

$$\left\{(z,z') \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, |z|^2 + |z'|^2 = 2\right\}.$$

C'est ainsi la réunion des deux tores pleins définis par $|z| \leq |z'|$ et $|z'| \leq |z|$ identifiés suivant leur bord commun

$$\left\{(z,z') \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, |z| = |z'| = 1 \right\},$$

comme on le voit immédiatement en prenant les coordonnées bipolaires $z = r \exp i\theta$, $z' = s \exp i\phi$. Notre métrique s'obtiendra à partir d'une métrique convenable sur T^2.

Lemme 2. *Sur T^2 la métrique lorentzienne*

$$g = 2\, d\theta\, d\phi + f(\theta)\, d\phi^2$$

est incomplète dès que la fonction f s'annule quelque part sans être identiquement nulle.

Preuve. En plus de l'intégrale première d'énergie

$$2\theta'\phi' + f(\theta)\phi'^2 = cte$$

on a l'intégrale première

$$\theta' + f(\theta)\phi' = 0$$

qui vient du champ de Killing $\partial/\partial\phi$ ou du théorème de Noether suivant les goûts. Considérons en particulier la famille des géodésiques nulles données par

$$\theta' + f(\theta)\phi' = a \quad \text{et} \quad \theta' + \tfrac{1}{2} f(\theta)\phi' = 0, \qquad \text{où } a \neq 0.$$

Le long d'une telle géodésique, on a $f(\theta)\phi' = 2a$ et $\theta' = -a$, donc $f(-at+\theta_0)\phi' = 2a$: si par exemple $f(0) = 0$, cette géodésique n'est pas prolongeable au delà de θ_0/a. □

Nous allons maintenant construire sur chaque tore solide une métrique Lorentzienne qui coïncide avec une métrique produit par celle du lemme au voisinage du bord. Pour le premier tore solide, on prend $\tilde{g}$ de la forme

$$a(r)(2\,d\theta\,d\phi + f(\theta)\,d\phi^2) + dr^2 + b(r)\,d\theta^2 - c(r)\,d\phi^2,$$

où a, b et c sont des fonctions lisses non négatives définies sur $[0,1]$ ayant les propriétés suivantes:

a) a vaut 0 sur $[0,1/4]$, et 1 sur $[1/2,1]$;

b) $b(r) = r^2$ sur $[0,1/4]$, et $b \equiv 0$ sur $[1/2,1]$;

c) c vaut 1 sur $[0,1/4]$, et 0 sur $[1/2,1]$.

Ainsi, $\tilde{g}$ est égale à la métrique produit $g+dr^2$ au voisinage du bord, et à la métrique produit $g_{\mathrm{eucl}} - d\phi^2$ au voisinage du cercle $r = 0$. Pour voir que $\tilde{g}$ est lorentzienne, il suffit de s'assurer qu'elle est non-dégénérée partout. C'est clair pour $r \leq 1/4$ ou $r \geq 1/2$. Pour $r \in]1/4, 1/2[$, le déterminant

$$\begin{vmatrix} b & a \\ a & af - c \end{vmatrix}$$

est non nul si et seulement si

$$f(\theta) \neq \frac{a(r)}{b(r)} + \frac{c(r)}{a(r)}.$$

Mais le membre de gauche a un minimum strictement positif sur $]1/4, 1/2[$, et il suffit que le maximum de f ne soit pas trop grand.

De même, sur le deuxième tore solide, on prend $\tilde{g}$ de la forme

$$a_1(s)(2\,d\theta\,d\phi + f(\theta)\,d\phi^2) + h(s)\,ds^2 + b_1(s)\,d\phi^2 - c_1(s)\,d\theta^2,$$

les fonctions a_1, b_1 et c_1 ayant les mêmes propriétés. On a introduit la fonction h pour que les deux métriques se raccordent de façon lisse! On la prend égale à $s^2/(2-s^2)$ au voisinage de 1 et à 1 au voisinage de zéro. Tout ira bien si

$$f(\theta) \neq -\frac{a_1(s)}{c_1(s)} - \frac{b_1(s)}{a_1(s)}$$

pour $s \in]1/4, 1/2[$.

4. Une variété lorentzienne compacte, localement homogène, et incomplète

4.1. Principe de la construction

On part du fait que $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$ admet des sous-groupes discrets co-compacts. Pour le voir, on peut soit invoquer un théorème général, soit remarquer que $\mathrm{PSl}(2,\mathbb{R})$ est à la fois le fibré unitaire et le groupe des isométries (conservant l'orientation) du plan hyperbolique. De plus, le relèvement au fibré unitaire d'une isométrie g est la translation à gauche L_g. Il suffit alors de prendre un sous-groupe $\Gamma \subset \mathrm{PSl}(2,\mathbb{R})$ tel que $\Gamma\backslash H^2$ soit compact: on peut prendre le groupe fondamental d'une surface à caractéristique d'Euler négative ou le groupe engendré par les réflexions par rapport aux côtés d'un triangle hyperbolique dont les angles sont des multiples rationnels de π, cf. [9]. Notons que dans le premier cas, $\Gamma\backslash\mathrm{PSl}(2,\mathbb{R})$ est le fibré unitaire de $\Gamma\backslash H^2$.

Munissons maintenant $\mathrm{PSl}(2,\mathbb{R})$ ou $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$ d'une métrique Lorentzienne invariante à gauche. Cette métrique passera au quotient par Γ, et la métrique obtenue sera (in)-complète si et seulement si celle de départ l'est. On est donc ramené à la construire des métriques lorentziennes invariantes à gauche sur $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$.

4.2. Rappels sur les géodésiques des groupes de Lie

Soit G un groupe de Lie semi-simple, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et soit B sa forme de Killing. La donnée d'une métrique pseudo-riemannienne invariante à gauche sur G équivaut à celle d'une forme quadratique non dégénérée Q sur $\mathfrak{g}$, ou encore d'un isomorphisme linéaire B-autoadjoint de ϕ de $\mathfrak{g}$. De plus, Q et ϕ se déterminent mutuellement grâce à la relation

$$\forall u,v \in \mathfrak{g},\ \ Q(u,v) = B\big(u,\phi(v)\big).$$

Toute courbe $t \mapsto c(t)$ de G est déterminée par la courbe $L^{-1}_{c(t)*}c'(t)$ de $\mathfrak{g}$. Les courbes de $\mathfrak{g}$ associées aux géodésiques sont les solutions de l'équation

$$\phi(x') = [\phi(x), x], \tag{1}$$

voir [1] ou [6] par exemple. Nous ferons un usage constant de la propriété suivante.

Lemme 3. *Les fonctions $B(\phi(x),x)$ et $B(\phi(x),\phi(x))$ sont des intégrales premières de (1).*

Preuve. C'est une conséquence immédiate de l'identité

$$B([x,y],z) + B(y,[x,z]) = 0, \quad \forall x,y,z \in \mathfrak{g}$$

(et $B(\phi(x),x)$ est simplement l'intégrale d'énergie !). □

Remarque. En fait si G est un groupe de matrices, on voit facilement que $\mathrm{tr}(\phi(x))^k$ est une intégrale première pour tout entier k (comparer à [2], ch. 4). Nous n'utiliserons ce fait que pour $k=2$, où l'on retrouve $B(\phi(x),\phi(x))$.

4.3. Cas de $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$

La forme de Killing de $sl(2,\mathbb{R})$ est $B(X,Y) = 4\,\mathrm{tr}(XY)$. Elle est de signature $(2,1)$. Nous ferons un usage répété des faits élémentaires suivants:

a) Les valeurs propres non nulles de ad H sont réelles si et seulement si $B(H,H) > 0$; en se ramenant au cas où $B(H,H) = 8$, les vecteurs propres associés, notés X_+ et X_-, vérifient les relations classiques

$$[H, X_\pm] = \pm 2X_\pm \quad \text{et} \quad [X_+, X_-] = H.$$

b) Si X_1, X_2, X_3 est une base B-orthonormée de $sl(2,\mathbb{R})$, autrement dit si

$$B(X_1,X_1) = B(X_2,X_2) = -B(X_3,X_3) = 1,$$

alors

$$[X_1,X_2] = 2X_3, \quad [X_1,X_3] = 2X_2, \quad [X_2,X_3] = -2X_1.$$

Ces propriétés vont nous permettre de montrer le résultat suivant.

Théorème 4. *Si la métrique invariante à gauche sur* $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$ *définie par l'endomorphisme* ϕ *est lorentzienne, elle n'est complète que dans les deux cas suivants:*

a) ϕ *admet un sous-espace propre de dimension* 2 *au moins.*

b) ϕ *est diagonalisable sur* $\mathbb{R}$*, admet deux valeurs propres opposées, et les vecteurs propres associés engendrent un plan lorentzien.*

Preuve. Supposons d'abord l'endomorphisme ϕ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Il l'est alors dans une base B-orthonormée X_1, X_2, X_3. Soient $(\lambda_i)_{1\le i\le 3}$ les valeurs propres correspondantes. Alors $x = \sum_{i=1}^{3} x_i X_i$ est d'après (1) solution du système

$$\dot{x}_1 = 2\left(\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_1}\right)x_2x_3, \quad \dot{x}_2 = 2\left(\frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_2}\right)x_1x_3, \quad \dot{x}_3 = 2\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_3}\right)x_1x_2,$$

et on a d'après le lemme 3 les intégrales premières

$$\lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 + \lambda_3x_3^2 = e, \quad \lambda_1^2x_1^2 + \lambda_2^2x_2^2 - \lambda_3^2x_3^2 = e'.$$

Plaçons nous dans le cas où quels que soient i et j, $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$. On déduit alors de ces formules que

$$x_1' = \pm 2\sqrt{\left(\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 (a - bx_1{}^2)(-c + dx_1{}^2)}$$

où

$$b = \frac{\lambda_1(\lambda_1+\lambda_3)}{\lambda_2(\lambda_2+\lambda_3)}, \qquad d = \frac{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_3(\lambda_2+\lambda_3)},$$

les valeurs de a et c importent peu. Si $bd < 0$, il existe, si la métrique est lorentzienne, des solutions où x_1 tend vers l'infini en un temps fini. Donc si la métrique est complète, $bd > 0$, c'est-à-dire:

$$\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_3)}{\lambda_2\lambda_3} > 0.$$

Le même raisonnement pour x_2 et x_3 donne les conditions

$$\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda_1\lambda_3}>0 \quad \text{et} \quad \frac{(\lambda_1+\lambda_3)(\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda_1\lambda_2}>0.$$

Ces trois inégalités sont clairement incompatibles, ce qui règle le cas diagonalisable (avec les formules ci-dessus, il est très facile de vérifier que si deux λ_i sont égaux la métrique est complète; il en est de même si $\lambda_1+\lambda_3=0$ ou $\lambda_2+\lambda_3=0$).

Plaçons nous maintenant dans le cas où ϕ a des valeurs propres complexes. Soient μ la valeur propre réelle, λ et $\overline{\lambda}$ les valeurs propres complexes. On pose $\lambda=\alpha+\beta$. Si U, V et $\overline{V}$ sont les vecteurs propres correspondants, on a $B(V,V)=B(\overline{V},\overline{V})$ et $B(V,\overline{V})=0$. En posant $U=X_1$, $V=X_2+iX_3$ et en prenant des normalisations convenables, X_1,X_2,X_3 devient une base B-orthonormée de $sl(2,\mathbb{R})$. Dans cette base

$$\phi=\begin{pmatrix}\mu & 0 & 0\\ 0 & \alpha & \beta\\ 0 & -\beta & \alpha\end{pmatrix}.$$

Les deux intégrales du lemme 3 sont

$$\mu x_1^2+\alpha(x_2^2-x_3^2)+2\beta x_2x_3=e,$$
$$\mu^2x_1^2+(\alpha^2-\beta^2)(x_2^2-x_3^2)+4\alpha\beta x_2x_3=e',$$

et la première équation de (1) donne

$$\mu\dot{x}_1=-\beta(x_2^2+x_3^2).$$

Alors, sur le niveau $e=e'=0$, x_1 est n'est pas borné, et satisfait à l'équation

$$\dot{x}_1=\pm\frac{2}{|\lambda|}\left(|\lambda|^2+\mu^2-2\alpha\mu\right)^{1/2}x_1^2.$$

Donc x_1 tend vers l'infini en un temps fini et la métrique n'est pas complète (le cas $\alpha=0$ est encore plus élémentaire).

Plaçons nous dans le cas où ϕ n'est pas diagonalisable. Si $(x-\lambda)^2(x-\mu)$ est le polynôme minimal de ϕ, on peut trouver une base X_0,X_1,X_2, avec $B(X_0,X_1)=B(X_0,X_2)=0$, pour laquelle

$$\phi(X_0)=\mu X_0,\quad \phi(X_1)=\lambda X_1,\quad \phi(X_2)=\lambda X_2+aX_1 \text{ avec } a\neq 0.$$

Lemme 5. *On a* $B(X_1,X_1)=0$, $B(X_0,X_0)>0$ *et* $B(X_1,X_2)\neq 0$.

Preuve du Lemme 5. La première égalité s'obtient en écrivant que

$$B\big(\phi(X_1),X_2\big)=B\big(\phi(X_2),X_1\big).$$

Alors si $B(X_0,X_0)$ était négatif, son orthogonal serait euclidien et ne pourrait contenir des vecteurs isotropes (il est clair que $B(X_0,X_0)\neq 0$, puisque B est non-dégénérée). Enfin, $B(X_1,X_2)$ est non nul pour la même raison.

En remplaçant X_2 par $X_2 + tX_1$, où $t = -B(X_2, X_2)/B(X_1, X_2)$, on peut supposer que $B(X_2, X_2) = 0$, autrement dit on peut se ramener au cas où la base X_0, X_1, X_2 du type H, X_+, X_-. □

Les deux intégrales premières sont alors

$$\mu x_1^2 + 2\lambda x_2 x_3 + a x_3^2 = e$$
$$\mu^2 x_1^2 + 2\lambda^2 x_2 x_3 + 2\lambda a x_3^2 = e',$$

et la première équation de (1) donne

$$\mu \dot{x}_1 = a x_3^2.$$

Sur le niveau $e = e' = 0$ par exemple, on a donc

$$\dot{x}_1 = \frac{\lambda - \mu}{\lambda} x_1^2,$$

et si $\lambda \neq \mu$ la métrique n'est pas complète. Elle l'est par contre si $\lambda = \mu$, comme on le vérifie directement. Enfin, le cas où λ est valeur propre triple de ϕ avec un espace propre de dimension 1 se traite exactement de la même façon, et la métrique n'est pas complète. □

Remarque. Les mêmes arguments montrent que tout groupe de Lie semi-simple non compact admet des métriques pseudo-riemanniennes incomplètes. En effet, l'algèbre de Lie d'un tel groupe contient une sous-algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Si on prend ϕ laissant cette sous-algèbre invariante, le groupe correspondant sera totalement géodésique. Comme d'après [4] tout groupe semi-simple admet des sous-groupes discrets co-compacts, on a une foule d'espaces pseudo-riemanniens compacts localement homogènes et non-complets.

5. Remarques finales

On obtient à partir de ces constructions des contre-exemples à deux assertions se trouvant dans la littérature.

a) Il est affirmé dans [11] que dans une variété lorentzienne compacte, une géodésique incomplète s'accumule sur une géodésique fermée, nulle et incomplète. Le lemme 2 fournit un contre-exemple à cette assertion, si on prend f avec un zéro d'ordre 2 au moins. Par exemple, dans le tore $(T^2, 2\,dx\,dy - \sin^2 \pi x\, dy^2)$, la géodésique $t \to (0, t)$ est complète, et décrit la courbe fermée $x = 0$, qui est un ensemble limite de géodésiques incomplètes (ce phénomène a été étudié systématiquement par Romero et Sánchez, cf. [7]).

b) Il est affirmé dans [8] que la complètude est une propriété ouverte pour l'ensemble des métriques Lorentziennes muni de la topologie de Whitney. Les tores de la section 3 comme les variétés construites dans la section 4 donnent des contre-exemples évidents à ces assertions. Cela n'a rien d'étonnant: l'application qui à une pseudo-métrique associe son champ géodésique (vu comme champ de vecteurs sur le fibré tangent) n'est pas continue pour la topologie forte de Whitney.

References

[1] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer, 1978) (traduction anglaise).
[2] V.I. Arnold, ed., *Dynamical Systems III* (Springer, 1988) (traduction anglaise).
[3] A. Besse, *Einstein Manifolds* (Springer, 1986).
[4] A. Borel, Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces, Topology 2 (1963) 111–122.
[5] Y. Carrière, Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines, Invent. Math. 95 (1989) 615–628.
[6] J. Cheeger and D.Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry* (North-Holland, 1975).
[7] A. Romero and M. Sanchez, On the completeness of geodesics obtained as a limit, to appear in J. of Math. Phys.
[8] D.E. Lerner, The space of Lorentz metrics, Commun. Math. Phys. 32 (1973) 19–38.
[9] W. Magnus, *Non Euclidean Tesselations and Their Groups* (Academic Press, 1974).
[10] B. O'Neill, *Semi-riemannian Geometry* (Academic Press, 1983).
[11] U. Yurtsever, A simple proof of geodesical completeness for compact space-times of zero curvature, J. Math. Phys. 33 (1992) 1295–1300.